23/11/15

Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\eta\in[\alpha,\beta)$, $\xi\in(\gamma,\delta)$

$I\subseteq[\alpha,\beta]$, $\eta\in I$, $y: I\to[\gamma,\delta]$

$(\forall x\in I): y'(x)=f(x,y(x))$, $f(\eta)=\xi$.

$$y:[\eta,\eta+\zeta]\to[\gamma,\delta] \quad (\forall x\in[\eta,\eta+\zeta]): y(x)=\xi+\int_\eta^x f(s,y(s))\,ds$$

Απόδ: $\zeta=\min\left\{\beta-\eta,\ \frac{\delta-\xi}{M},\ \frac{\xi-\gamma}{M}\right\}$, $I=[\eta,\eta+\zeta]$

$$y_\nu(x):=\begin{cases}\xi, & x\in[\eta,\eta+\frac{\zeta}{\nu}]\\ \xi+\displaystyle\int_\eta^{x-\zeta/\nu} f(s,y_\nu(s))\,ds, & x\in[\eta+\frac{k\zeta}{\nu},\eta-\frac{(k+1)\zeta}{\nu}],\ k\in\{1,\dots,\nu-1\}\end{cases}$$

Συμπαγής χώρος $A=\{g\in C([\eta,\eta+\zeta],\mathbb{R})\mid g(\eta)=\xi$, $(\forall(x,y)\in[\eta,\eta+\zeta]^2: |g(x)-g(y)|\le M|x-y|\}$

Θέλω να δω $(\forall x\in[\eta,\eta+\zeta])(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall g\in A)(\forall y\in[\eta,\eta+\zeta]): |x-y|<\delta\Rightarrow$
$\Rightarrow|g(x)-g(y)|<\varepsilon$

(ορισμός ισοσυνέχειας)

$$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$$

> Όταν ένα σύνολο δίνεται με "$\le$" είναι κλειστό

Έστω $x,y\in[\eta,\eta+\zeta]$ $(x,y\neq\eta)$

$$|y_\nu(x)-y_\nu(y)|=\left|\int_\eta^{x-\frac{\zeta}{\nu}} f(s,y_\nu(s))\,ds-\int_\eta^{y-\frac{\zeta}{\nu}} f(s,y_\nu(s))\,ds\right|$$

$$=\left|\int_{y-\frac{\zeta}{\nu}}^{x-\frac{\zeta}{\nu}} f(s,y_\nu(s))\,ds\right|$$

$$y(x)=\xi+\int_\eta^{\xi} f(s,y_\nu(s))\,ds \qquad y_\nu\to y$$

$$y_\nu(x)=\xi+\int_\eta^{x-\frac{\zeta}{\nu}} f(s,y_\nu(s))\,ds=\xi+\int_\eta^{x}+\int_{x-\frac{\zeta}{\nu}}^{x}$$

$$\int_\eta^x f(s,y_\nu(s))\,ds\longrightarrow\int_\eta^x f(s,y(s))\,ds.$$

Ορισμός: Έστω $[\alpha, b] \subseteq \mathbb{R}$ και $P([\alpha, b])$ το σύνολο των πολυωνυμικών πραγμ. συναρτήσεων ορισμένων στο $[\alpha, b]$.

Τότε αν $P \in P([\alpha, b])$: $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k$

$\alpha_k \neq 0 \Rightarrow k$: βαθμός πολ/μου.

Λήμμα: $\exists P_\nu$ με $P_\nu \in P([0,1])$ τ.ω. $P_\nu \rightrightarrows \varphi$ όπου $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$.

Ορίζω ακολ. πολ/κών συν/σεων $P_1(x) = 0$, $P_{\nu+1}(x) = P_\nu(x) + \frac{1}{2}(x - P_\nu^2(x))$, $x \in [0,1]$.

$$0 \leq P_\nu(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1]. \quad (*)$$

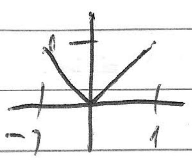
Για $\nu = 1 \Rightarrow P_1(x) = 0 \Rightarrow$ η $(*)$ ισχύει.

Υποθ. ότι ισχύει για $\nu = k$ δηλ $0 \leq P_k(x) \leq \sqrt{x}$

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{1}{2}(x - P_k^2(x)) = P_k(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_k(x))(\sqrt{x} - P_k(x)) \underset{\text{υποθ.}}{\leq} \ldots = \sqrt{x}$$

δηλ η $(*)$ ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Πόρισμα: $\exists q_\nu \in P([-1,1])$ τ.ω. $q_\nu \rightrightarrows y$, όπου $y(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$



Αποδ: Για την P_ν του λήμματος έχουμε ότι

$$\lim_{\nu \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |P_\nu(x) - \sqrt{x}| = 0$$

τότε:

$$\lim_{\nu \to \infty} \sup_{x \in [-1,1]} |P_\nu(y^2) - |y|| = 0$$

Θεώρημα Προσέγγισης του Weierstrass

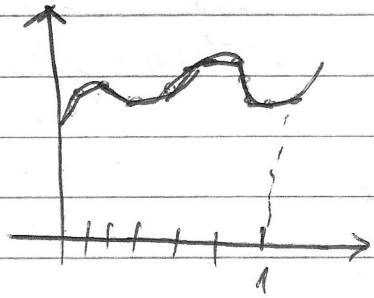
$$\forall f \in C([0,1], \mathbb{R}),\ \exists q_\nu \in P([0,1]) : q_\nu \rightrightarrows f$$

Απόδειξη: Έστω $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $[0,1]$ είναι συμπαγές τότε f ομ-συνεχής.

Τότε $\exists \delta > 0$: $\forall x, y \in [0,1]$ με $|x - y| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \gamma_\varepsilon$ (1)

Έστω $N\in\mathbb{N}$, έστω $N > 1/\delta$



$$L_N(x) = f\left(\frac{k}{N}\right) + N\left[f\left(\frac{k+1}{N}\right) - f\left(\frac{k}{N}\right)\right]\left(x-\frac{k}{N}\right)$$

$x\in\left[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}\right]$ $k=0,1,\dots,N-1$

Έστω $x\in[0,1]$, τότε $(\exists k\in\mathbb{N}): 0\le k\le N-1$ με $x\in\left[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}\right] \Rightarrow \frac{k}{N}\le x\le\frac{k+1}{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0\le x-\frac{k}{N}\le\frac{1}{N}<\delta \Rightarrow \left|x-\frac{k}{N}\right|\le\frac{1}{N}<\delta$$

Λόγω $(*) \Rightarrow \left|f(x)-f\left(\frac{k}{N}\right)\right| < \gamma_\varepsilon$

$(\exists\, \alpha_0,\dots,\alpha_N): L_N(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\alpha_k \left|x-\frac{k}{N}\right|\right)$ (εξισώνω τα μέλη των $L_N(x)$ από τις 2 σχέσεις).

Από το προηγ. θεώρημα $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, q_\nu \in P([-1,1]) : \big||x| - q(x)\big| < \gamma_\varepsilon$

$$S_{N,\nu}(x) = \alpha_0 + \sum_1^N \alpha_k q_\nu\left(x-\frac{k}{N}\right) \le \left|L_N(x) - S_{N,\nu}(x)\right| =$$

$$= \sum|\alpha_k|\left|\left(x-\frac{k}{N}\right) - q_\nu\left(x-\frac{k}{N}\right)\right|$$

και άρα $|f(x) - L_N(x)| < 2\gamma_\varepsilon$